ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Σεπτέμβριος 2018

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

<u>Θέμα 1</u>: Να βρεθεί η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της $f \in X_5$, στον P_1, όπου

$$X_5 = \{-2, -1, 1, 2, 3\} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c|ccccc} x_i & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & -1 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array},$$

χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο εναλλαγής σημείων ξεκινώντας με $x_\sigma = \{-2, -1, 1\}$.

<u>Θέμα 2</u> α) Να βρεθεί η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x^2$, ορισμένης στο διάστημα $[-1, 1]$, στον P_2, χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Chebushev.
β) Να βρεθεί η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x^2$, ορισμένης στο διάστημα $[-1, 1]$, στον P_2, χρησιμοποιώντας ορθογώνια πολυώνυμα.

<u>Θέμα 3</u>: Να βρεθεί η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της $f \in X_4$, στον P_2, όπου

$$X_4 = \{-2, -1,\ 1,\ 2\} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c|cccc} x_i & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline f_i & -12 & -2 & 0 & 4 \end{array},$$

χρησιμοποιώντας ορθογώνια πολυώνυμα στο σύνολο X_4 που παράγονται από την αναδρομική σχέση.

<u>Θέμα 4</u>: Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση spline στο $[-1, 3]$ που προσεγγίζει τη συνάρτηση f η οποία δίνεται στο σύνολο σημείων

$$X_4 = \{-1, 0, 1, 3\}, \quad \begin{array}{c|cccc} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_i & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline f_i & 4 & 0 & -4 & 12 \\ & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{array}.$$

και $f'(-1) = -2, f'(3) = 22$.
Δίνεται ότι το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite στο διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$ είναι

$$\begin{aligned} s(x) &= f_j \left[\frac{(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^2} + 2\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^3}\right] + f_{j+1}\left[\frac{(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^2} - 2\frac{(x-x_{j+1})(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^3}\right] \\ &+ s'_j\left[\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})^2}{(\Delta x_j)^2}\right] + s'_{j+1}\left[\frac{(x-x_{j+1})(x-x_j)^2}{(\Delta x_j)^2}\right]. \end{aligned}$$